Algebra II
I appello straordinario - 10 aprile 2018
A.A. 2017/2018

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale

$$F^4 = \{ (a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in F\}.$$

Con $h, k \in F,$ si considerino i vettori $v_1 = (6, 2, 0, 4)$, $v_2 = (2, h, 3, 0)$, $v_3 = (k, 1, -2, 9)$, $v_4 = (7, 4, 8, 5)$, ed i sottospazi $W = < v_1 , v_2 >$ e $V = < v_3 , v_4 >$ di F^4.

(I) In funzione di h , k e della caratteristica di F :

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V ;

- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V ;

- supposto $k = 3$, si studi $dim\ (W + V)$ nei casi: $car\ F = 2$, $car\ F = 3$, $car\ F = 5$, precisando anche quando $W + V = W \oplus V$.

(II) Posto $U = < v_1 , v_4 > = < (6, 2, 0, 4), (7, 4, 8, 5) >$, si descrivano gli elementi di U e:

- si determini, in funzione della caratteristica di $F,$ la dimensione di U ;

- si verifichi quando la posizione $\psi(\ (a, b, c, d) + U\ ) = (a - b - d, 16a + c - 24d)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2 ed in tal caso si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali; se ne discutano poi eventuali suriettività e iniettività. In caso di applicazione non iniettiva, si individuino elementi distinti del dominio con uguale immagine.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + x^4 + 21x^3 + 11x^2 + 11x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x] .$$

(I) Si determini per quali valori di p l'elemento 1 è radice di $f(x)$, per quali valori lo è -1.

(II) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(***i***) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(***ii***) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$-base.